8.12.15 και 10.12.15

[Άλγεβρα Παραγώγων (αλγεβρικές ιδιότητες)]

Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό,

διαφορίσιμες στο $\bar{x} \in U$, και $\phi : U \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$

Ισχύουν:

$$D(\bar{f} \pm \bar{g})(\bar{x}) = D\bar{f}(\bar{x}) \pm D\bar{g}(\bar{x})$$

$$D(\bar{f} \cdot \bar{g})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x})^t D\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x})^t D\bar{g}(\bar{x})$$

$$D(\phi \bar{f})(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) D\phi(\bar{x}) + \phi(\bar{x}) D\bar{f}(\bar{x})$$

, με τις παραπάνω να αποτελούν τρεις ενδεικτικές

Αποδεικνύονται εύκολα μέσω της άλγεβρας Ιακωβιανών πινάκων, αξιοποιώντας συγχρόνως τη διαφορισιμότητα των $\bar{f}, \bar{g}$ και ϕ.

Κανόνας Αλυσίδας (ή διαφόρισης σύνθετης συνάρτησης)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ με $\bar{f}(U) \subset V$

Έστω ακόμη, $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$ και $\bar{g}: V \to \mathbb{R}^k$ διαφορίσιμη στο $\bar{f}(\bar{x})$

Τότε, $(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}): U \to \mathbb{R}^k$, διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$,

με:

$$D(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}) = D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x})) \cdot D\bar{f}(\bar{x})$$

(Απόδειξη, βλέπε E-book Γιαννούλη)

– Άσκηση Γιαννούλη 10.12.15. (Αλυσιδωτή διαφόριση) –

Έστω $\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \frac{\sqrt{x}}{y} \end{pmatrix}$, $(x,y) \in (0,\infty) \cup (0,\infty)$

και $f(u,v) = \ln(u^2+v^2)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Να υπολογισθεί η παράγωγος της $f \circ \bar{g} : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$.

Λύση:

Η διαφορισιμότητα των $f, \bar{g}$ αποδεικνύεται εύκολα εξετάζοντας τις εκάστοτε συνιστώσες τους.

Για $f, \bar{g}$ διαφορίσιμες, έπεται ότι $f \circ \bar{g}$ διαφορίσιμη,

με
$$D(f \circ \bar{g})(x,y) = Df(\bar{g}(x,y)) \cdot D\bar{g}(x,y)$$

$$= \frac{2}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \left(xy, \frac{\sqrt{x}}{y}\right)_{1\times 2} \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{2y\sqrt{x}} & \frac{-\sqrt{x}}{y^2} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$= \frac{2}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \left(xy^2 + \frac{1}{2y^2}, \ x^2y - \frac{x}{y^3}\right)$$

$$= \left(\frac{2xy^2 + \frac{1}{y^2}}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \, , \, \frac{2x^2y - \frac{2x}{y^3}}{x^2y^2 + \frac{x}{y^2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(x^2y^2 + \frac{x}{y^2}\right)\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\left(x^2y^2 + \frac{x}{y^2}\right)\right) \right)$$

$$= \nabla\left(\ln\left(x^2y^2 + \frac{x}{y^2}\right)\right) \overset{\text{υπόθεση}}{=\!=} \nabla(f \circ \bar{g})(x,y)$$

$$(= D(f \circ \bar{g})(x,y))$$